ポアンカレ予想

ジョン・ミルナー
ニューヨーク州立大学ストーニーブルック校
２０００年3月

1904 年アンリ・ポアンカレは次のような問題を出した [17, pp. 486, 498]。“*Considérons maintenant une variété [fermée] V à trois dimensions $\cdots$ Est-il possible que le groupe fondamental de V se réduise à la substitution identique, et que pourtant V ne soit pas simplement connexe?*” 日本語および現代の用語では次のような問題である。

> 境界のないコンパクト３次元多様体 V を考えよう。V が３次元球面でないにもかかわらず、V の基本群が自明となることがありえるか？

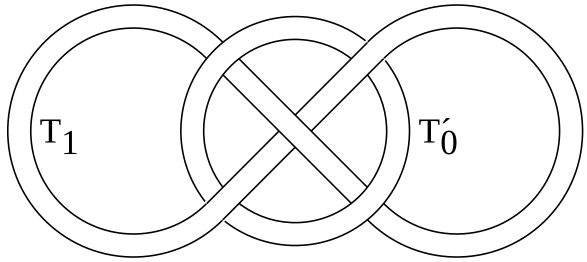
ポアンカレは驚くほどの先見性を持って次のようなコメントを続けている。“*Mais cette question nous entraînerait trop loin*”. この時から、単連結な３次元閉多様体は３次元球面に同相であるという仮説は**ポアンカレ予想**として知られている。この予想はトポロジー研究者に刺激を与え続け、多くの誤った証明を生んでもきたが、多様体のトポロジーの理解を大きく進歩させた。

始めの頃の勘違い

上の予想を述べる４年前、ポアンカレは次の間違った定理を述べている [17, p. 370]。“*dont la démonstration demanderait quelques développements*”（証明にはもう少し研究を重ねる必要がある）と述べてはいるが。

> ホモロジーが n 次元球面と同型な任意のコンパクト組み合わせ多様体は n 次元球面と同相である。

（前と同様、これは現代の用語で書き直したものである。）しかし、１９０４年までに、ポアンカレは基本群の概念を発見、研究し、この命題に対する美しい反例を構成した。ポアンカレの例はコセット空間 $M^3 = SO(3)/I_{60}$ として記述できる。ここで I_{60} は正１２面体をそれ自身に移す回転のなす群である。（言い換えれば、M^3 は３次元空間の原点に中心を持つ正１２面体全体のなす空間と同一視される。）この空間は位数１２０の非自明な基本群 $\pi_1(M^3)$ を持つ。



次の、重要な間違った定理は１９３４年のヘンリー・ホワイトヘッドによるものである。ポアンカレ予想の証明のための一部として、ホワイトヘッドはすべての可縮な３次元開多様体はユークリッド空間と同相であると主張した。ポアンカレの足跡をたどるように、ホワイトヘッドはその後、自分の定理の反例を見出し、多様体のトポロジーに関する我々の理解を実質的に増加させた。([26, pp. 21-50] 参照。) ホワイトヘッドの反例は次のように簡明に作られる。３次元球面に図のように交わらないように埋め込まれた２つのソリッド・トーラスをから話を始める。T_0 は自明な結び目となっているから、その補空間 $T_0 = S^3 \setminus \mathrm{interior}(T_0')$ もソリッド・トーラスであり、$T_0 \supset T_1$ であるが、$\pi_1(T_0 \setminus T_1)$ は非可換群である。３次元球面から自分自身への同相写像 h で T_0 を T_1 の上に写すものをとる。そうすると、$T_{n+1} = h(T_n)$ とすることによって、S^3 の中で自明な結び目となっているソリッド・トーラスの列

$$\cdots \supset T_{-1} \supset T_0 \supset T_1 \supset T_2 \cdots$$

が順に構成される。$\bigcap T_n$ の補空間 $S^3 \setminus \bigcap T_n$ (すなわち T_{-n} の和集合) が、目的のホワイトヘッドの反例である。これは、可縮な多様体でありながら、無限遠において、単連結ではないのである。

３次元トポロジーにおける落とし穴の楽しい紹介については Bing 氏の本を参照すると良い。ポアンカレ予想を攻略した代表的なものとしては文献にある Birman, Gabai, Gillman and Rolfsen, Jakobsche, Papakyriakopoulos, Rourke, および Thickstun の論文を参照すると良い。

高次元の場合

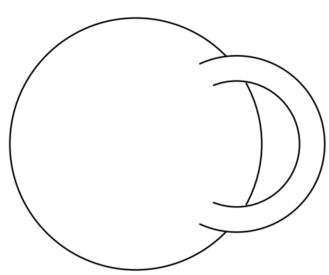
１９５０年代の終わりから１９６０年代の初めにかけては、高次元の多様体の方が３次元多様体よりも扱いやすいという発見により、劇的な発展があった。（扱いやすい理由の一つは次のことである。基本群はたとえそれが自明であってもすべての次元において重要な役割を果たす。基本群における関係式は、多様体へ写像された２次元円板に対応している。５次元以上では、そのような２次元円板は、自分自身と交わりを持たない一般の位置に配置できるが、３次元、４次元では自分自身との交わりを回

避できない、これにより重大な困難が生じる。）１９６０年、ステファン・スメールは高次元におけるポアンカレ予想が証明できたと発表した。その後すぐに、ジョン・ストーリングスによりまったく違った方法よる証明が、また、アンドリュウ・ワラスによりスメールとよく似た方法による証明が与えられた。ここでは、まずストーリングスの結果を紹介しよう。仮定が弱く、証明もやさしいが、弱い結論を導くものである。ストーリングスは次元は７次元以上と仮定したが、ジーマンによりこの議論は５次元、６次元に拡張された。

ストーリングス・ジーマンの定理。M^n を次元 $n \geq 5$ の有限単体的複体で、球面 S^n と同じホモトピー型をもち、局所的にユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ と区分線形同相なものとする。このとき、M^n は S^n と位相同型であり、位相同型写像は一点を除いて区分線形なものにとれる。言い換えると、一点の補空間 $M^n \setminus (\mathrm{point})$ はユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ と区分線形同相である。

（証明方法は、あらゆる困難を一点に押し付けていくものであり、この点の近くでは制御不能なほどの状態になっている。）

スメールの証明と、直後にワラスによって与えられた証明は微分可能性を使う方法に頼っている。多様体を n 次元の球体から始めて、順にハンドル体を付け加えて構成していく方法である。ここで、k **ハンドル**を、境界を持つ多様体 M^n に付け加えることは次のように行われる。まず、k 次元の胞体（球体）を、その境界の $(k-1)$ 次元の球面から M^n の境界への接着同相写像により貼り付け、これの胞体を厚み付けして、角を丸めることにより、より大きな、境界を持つ多様体が得られるのである。証明はこれらのハンドルを並べ替え、ハンドルを対消滅させることにより行われる。（[13]参照。）



１ハンドルを貼り付けた３次元球体

スメールの定理。M^n を次元 $n \geq 5$ の微分可能なホモトピー球面とする。M^n は S^n と同相である。実際、M^n は２個の閉 n 次元球体の境界を或る微分同相写像で貼り合せて得られる多様体と微分同相である。

この定理は、少なくとも $n \geq 6$ の場合にはワラスによっても証明されている。（５次元の場合が、非常に難しいことにも注意すべきであるが。）

さらに難しい４次元の場合の取り扱いは、２０年後の、マイケル・フリードマンの仕事まで待たなければならなかった。４次元では、スメールとワラスによる微分可能性を使う方法も、ストーリングスとジーマンによる区分線形性を使う方法も役に立たないのである。フリードマンは野性的な微分不可能性に訴える方法を使い、４次元のポアンカレ予想を解いただけではなく、単連結な４次元閉位相多様体の完全な分類を与えた。そのような多様体の整係数コホモロジー群 H^2 は自由加群である。フリードマンは２つの不変量により、分類を行った。行列式が ± 1 の対称双線形形式であるカップ積 $\beta : H^2 \otimes H^2 \to H^4 \cong \mathbf{Z}$、および積多様体 $M^4 \times \mathbf{R}$ が微分可能構造をもつとき、そのときに限り 0 となる $\{0, 1\}$ に値を持つ**カービー・ジーベンマン不変量** κ である。

フリードマンの定理。 ２つの単連結な４次元閉多様体が位相同型であることと、同じ双線形形式 β を持ち、同じカービー・ジーベンマン不変量 κ を持つこととは同値である。任意の β はそのような多様体の双線形形式となり得る。もしもある $x \in H^2$ に対し、$\beta(x \otimes x)$ が奇数ならば、κ のいずれの値もとりうる。$\beta(x \otimes x)$ が常に偶数ならば κ は β の符号数の８分の１と合同となり、β により決まった値をとる。

特に、M^4 がホモトピー球面ならば、$H^2 = 0$ かつ $\kappa = 0$ であり、M^4 は S^4 と同相となる。４次元における区分線形理論および微分可能理論は、さらに非常に難しいものであることを注意しておく。とくに、$\kappa = 0$ となる４次元多様体のうち、どれが実際に微分可能構造を持つのか判っていないし、いつ微分可能構造が一意的かも判っていないのである。これらに対する主たる結果はドナルドソンによるものである。このような問題の複雑さを示す一例として、次のことが挙げられる。フリードマンはドナルドソンの結果を使って、$\mathbf{R}^4$ には非可算個の同値でない微分可能構造が存在することを示した。（Gompf 参照。）

サーストンのプログラム

３次元においては、位相的理論、区分線形的理論、微分可能的理論の区別はなくなる（Hirsch, Munkres, Moise 参照）。しかし、基本群にともなう困難が重大になる。サーストンの遠大な予想によれば、３次元多様体は２次元球面および２次元トーラスに沿って切り離すことによって、本質的に一意的に構成部分に分かれ、それぞれの構

成部分は単純な幾何構造をもつとされる。サーストンのプログラムには８つの３次元の幾何が現れる。そのうちの６個はよく理解されており、定負曲率の幾何学については非常に多くの前進がある。しかしながら、８番目に残った幾何である、定正曲率の幾何学についてはほとんど手がつけられていない。この幾何について、次のようなポアンカレ予想を拡張する予想が与えられている。

サーストン楕円化予想。有限な基本群を持つ３次元閉多様体は定正曲率の計量をもつ。したがって、それは S^3/Γ と同相である。ここで、$\Gamma \subset SO(4)$ は S^3 に自由に作用する回転を元とする有限群である。

（ポアンカレ予想は $\Gamma \cong \pi_1(M^3)$ が自明な群である特別な場合に当たっている。）ここに現れうる部分群 $\Gamma \subset SO(4)$ はホップにより、以前から分類されているが、この予想は手がつけられていない。（１９９５年までのサーストンのプログラムに関する文献については [12, p. 93] を参照せよ。最近の結果としては [1] もある。）

文献

[1] M. T. Anderson, Scalar curvature and geometrization conjectures for 3-manifolds, M.S.R.I Publ. 30, 1997. (See also: www.math.sunysb.edu/˜anderson .)

[2] R. H. Bing, Some aspects of the topology of 3-manifolds related to the Poincaré conjecture, in "Lectures on Modern Mathematics II", edit. T. L. Saaty, Wiley 1964.

[3] J. Birman, Poincaré's conjecture and the homeotopy group of a closed, orientable 2-manifold, Collection of articles dedicated to the memory of Hanna Neumann, VI. J. Austral. Math. Soc. 17 (1974), 214–221.

[4] S. K. Donaldson, Self-dual connections and the topology of smooth 4-manifolds, Bull. Amer. Math. Soc. 8 (1983) 81–83.

[5]M. H. Freedman, The topology of four-dimensional manifolds, J. Diff. Geom. 17 (1982), 357–453.

[6] D. Gabai, Valentin Poenaru's program for the Poincaré conjecture, Geometry, topology, & physics, 139–166, Conf. Proc. Lecture Notes Geom. Topology, VI, Internat. Press, Cambridge, MA, 1995.

[7] D. Gillman and D. Rolfsen, The Zeeman conjecture for standard spines is equivalent to the Poincaré conjecture, Topology 22 (1983), no. 3, 315–323.

[8] R. Gompf, An exotic menagerie, J.Differential Geom. 37 (1993) 199–223.

[9] M. Hirsch, Obstruction theories for smoothing manifolds and maps, Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963) 352–356.

[10] H. Hopf, Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem, Math. Annalen 95 (1925-26) 313-319.

[11] W. Jakobsche, The Bing-Borsuk conjecture is stronger than the Poincaré conjecture, Fund. Math. 106 (1980) 127–134.

[12] J. Milnor, “Collected Papers, Volume 2, The Fundamental Group”, Publish or Perish 1995,

[13] J. Milnor, with J. Sondow and L. Siebenmann, “Lectures on the h-Cobordism Theorem”, Princeton Math. Notes, Princeton U. Press 1965.

[14] E. E. Moise, “Geometric Topology in Dimensions 2 and 3”, Springer 1977.

[15] J. Munkres, Obstructions to the smoothing of piecewise-differentiable homeomorphisms, Annals Math. 72 (1960) 521–554.

[16] C. Papakyriakopoulos, A reduction of the Poincaré conjecture to group theoretic conjec- tures, Annals Math. 77 (1963) 250–305.

[17] H. Poincaré, Oeuvres, Tome VI, Paris 1953.

[18] C. Rourke, Algorithms to disprove the Poincaré conjecture, Turkish J. Math. 21 (1997) 99–110.

[19] S. Smale, Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four, Annals Math. 74 (1961) 391–406. (See also: Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960) 373–375.)

[20] S. Smale, The story of the higher dimensional Poincaré conjecture (What actually happened on the beaches of Rio), Math. Intelligencer **12** (1990) 44–51.

[21] J. Stallings, Polyhedral homotopy spheres, Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960) 485–488.

[22] T. L. Thickstun, Open acyclic 3-manifolds, a loop theorem and the Poincaré conjecture, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 4 (1981) 192–194.

[23] W. P. Thurston, Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, in “The Mathematical heritage of Henri Poincaré”, Proc. Symp. Pure Math. 39 (1983), Part 1. (Also in Bull. Amer. Math. Soc. 6 (1982) 357–381.)

[24] W. P. Thurston, “Three-Dimensional Geometry and Topology”, Vol. 1. edited by Silvio Levy. Princeton Mathematical Series 35. Princeton University Press 1997.

[25] A. Wallace, Modiffcations and cobounding manifolds, II , J. Math. Mech 10 (1961) 773–809.

[26] J. H. C. Whitehead, Mathematical Works, Volume II, Pergamon 1962.

[27] E. C. Zeeman, The Poincaré conjecture for $n \geq 5$, in “Topology of 3-Manifolds and Related Topics” Prentice-Hall 1962. (See also Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961) 270.)