数理科学特別講義 VII

1 月 28 日 (月)～2 月 1 日 (金)

14:40 - 16:40 数理科学研究科 (駒場)123 号室

伊山 修 氏（名古屋大学大学院数理科学研究科）

多元環 Λ の表現論とは, Λ-加群の成す圏の構造を調べる事です. 講義では今日常識となっている Auslander-Reiten 理論と傾理論を解説し, その応用例を一つ挙げる予定です. 参考書として [1] を挙げておきます. 予備知識はほとんど不要です. 環と加群, 圏と関手の定義と, ホモロジー代数の基本事項（射影分解, Ext, Tor）を知っていれば十分ですが, 必要に応じて [2] を参照してください.

講義では, 初日に有限次元多元環を扱う上でどうしても必要な事柄である, Jacobson 根基, 冪等元, Krull-Schmidt 型定理, 森田同値などを解説します.

次に, 多元環の表現論の古典理論である, Auslander-Reiten 理論を解説します. **安定圏** $\underline{\mathrm{mod}}\Lambda$ と**余安定圏** $\underline{\mathrm{mod}}\Lambda$ を定義し, **AR 移動**と呼ばれる圏同値

$$\tau : \underline{\mathrm{mod}}\Lambda \to \overline{\mathrm{mod}}\Lambda$$

および, **AR 双対性**と呼ばれる関手的同型

$$\underline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(X, Y) \simeq D\,\mathrm{Ext}^1_\Lambda(Y, \tau X)$$

を構成します. これを用いて, $\mathrm{mod}\,\Lambda$ の構造の基本単位を与える**概分裂完全列**

$$0 \to \tau X \to E \to X \to 0$$

が構成されます.

もともと Auslander-Reiten 理論は, 直既約 Λ-加群の分類を動機として発展してきたものですが, 今日では表現型の理論によって, 全ての直既約 Λ-加群の分類が必ずしも良い問題意識では無い事が知られています. $\mathrm{mod}\,\Lambda$ の圏構造において, 何らかの意味で特徴的な加群に限定して研究する方向に, 研究者の多くは向かっているようです. その中でも重要なものの一つとして**傾加群**がありますが, 講義の次の目的は傾理論の解説です. もともと傾理論は, 性質の良く分かっている多元環から, 傾斜群の準同型環をとることによって, 元の多元環と性質の似通った, 新しい多元環を作り出すために考え出されたものでした. 今日では傾理論は, 導来圏の観点から解釈されていて, 特に傾加群の一般化である傾複体によって, 2 つの環の導来圏が同値である事が特徴付けられる事が知られています.

以上の基本事項の応用として講義では最後に, 一変数多項式環の剰余環 $\Lambda = k[x]/(x^n)$ の **Auslander 多元環**

$$\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda\left(\bigoplus_{i=1}^{n} k[x]/(x^i)\right)$$

に対して, 傾加群の分類を解説します.

定理 n 次対称群と, Γ の基本的傾加群の同型類の間に一対一対応が存在する.

もともとこの対応は, Brüstle, Hille, Ringel, Röhrle によって組み合わせ的手法で与えられたものですが, 講義では Auslander 多元環と傾加群の一般論を用いてより概念的な構成を与えます. 特に傾加群の**変異**の観点から, この対応が自然なものである事が分かります. これは Buan, Reiten, Scott との 2-Calabi-Yau 多元環に関する共同研究の内容を,

M2 の学生の辻岡佑介, 小林大輔が修士論文で有限次元多元環に応用してくれたものです.

[1] I. Assem, D. Simson, A. Skowroński: Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1. Techniques of representation theory. Cambridge University Press, 2006.

[2] 岩永恭雄, 佐藤真久, 環と加群のホモロジー代数的理論, 日本評論社, 2002.