数理科学特別講義 II

6 月 4 日 (月)〜6 月 8 日 (金)

14:40 - 16:40 数理科学研究科 (駒場)123 号室

斎藤 恭司 氏（京都大学数理解析研究所)）

ルート系とリー環の圏論的構成 — McKay 対応と行列分解

講義内容：

McKay 対応とは、正多面体群 （注１）に対し、有限ルート系のディンキン図式（注２）を対応させるものである。これは、一見異なると思われていた二つの数学的世界：一つは、ギリシャ時代以来良く知られてきた正多面体の分類、もう一つは Killing Cartan 等により約 100 年前に成し遂げられた単純リー環の分類、それらの分類リストの間に一対一の対応が付くというということであるから、1980 年の発表以来反響を呼び、多くの数学者をインスパイアしてきたのも頷ける話である。

その頃、私は、楕円積分を一般化した原始形式とその積分の理論を構築するという研究目標を持っていて、そのために単純リー環を一般化した理論を作りたいと考えていた。その理由は別途説明するが，McKay 対応の話を聞いたとき「これはいける、僕の期待しているリー環の構成にヒントを与えるのでないか」と思った。つまり、正多面体群のリストを何か別のものに置き換え、その対応物を見れば、単純リー環の一般化が得られるのでないか。

しかし、正多面体も単純リー環も完全に分類されている。いまさら，それに付け加えるものとして、いったい何があるというのであろうか。結論を言ってしまうと、そのような試み（注３）の中から数年後に生まれてきたものが、正規ウェイト系なるものである。ここで、正規ウェイト系とは、一見、正多面体群とは似ても似つかない四つの正整数の組 $W := (a, b, c; h)$ であって、W から定まる次の T の有理式

$$X_W(T) = T^{-h}\frac{(T^h - T^a)(T^h - T^b)(T^h - T^c)}{(T^a - 1)(T^b - 1)(T^c - 1)}$$

が T のローラン多項式に展開できるもののことである。では、このような正規ウェイト系が、何故、McKay 対応の一般化を与えるのか、その端緒を簡単に説明しよう。ただし、きちんとした説明は講義に譲り、ここでは象徴的なことがらの説明にとどめる。

上記の「ローラン多項式に展開できる」という条件は 展開に T の負巾も許すということだが、条件を強めて T の正巾しか出てこないという制約を課してみよう。すると、そのような条件を満たす正規ウェイト系は実は５種類しかない。それが、丁度ピッタリ、McKay 対応に登場した ５つの対象のリストと１対１に対応しているのである。例えば、その５種類のウェイト系のうち E_8 型と呼ばれるものは $(6, 10, 15; 30)$ であるが、上記の $X_W(T)$ を多項式に展開すると次のようになる。

$$T^{-30}\frac{(T^{30} - T^6)(T^{30} - T^{10})(T^{30} - T^{15})}{(T^6 - 1)(T^{10} - 1)(T^{15} - 1)} = T + T^7 + T^{11} + T^{13} + T^{17} + T^{19} + T^{23} + T^{29}$$

ここで、右辺の展開式をじっと見てみると、T の単項式達の巾指数が、ちょうど E_8 型ルート系の exponents と呼ばれるものに一致していることに気付く。他の４種類の場合も同様である。これではまだルート系にもリー環にもなっていないが、少くとも分類リストが対応するという点で、何かありそうである。

そして 20 年の紆余曲折のすえ、共同研究者とともに私は一つの道筋に至った。それは、ウェイト系に対し圏論的にルート系やリー環を構成するというものである。

本講義ではまず、ウェイト系に対し、ある特別な三角圏を行列分解の理論を利用して構成する。その三角圏のグロタンディック群（K 群）を考えると、正の巾指数しかない５つの場合には、それらの K 群の中に、対応する５つの単純ルート系が出てくる。そして、負の巾指数を許した場合にも、ある一般化された意味の無限ルート系が登場するのである。まだ解明途上ではあるが、その仕組みについて紹介する予定である。また、時間が許せば、対応する無限次元リー環が、特異点の半普遍変形の空間や原始形式とどのように関わってくるのかについて語りたいと考えている。

注１　正確には、巡回群、 正二面体群、正四面体群、正六面体群＝正八面体群、正十二面体群＝正二十面体群の５種類である。

注２　正確には、simply laced と呼ばれる $\mathrm{A}_l, \mathrm{D}_l, \mathrm{E}_6, \mathrm{E}_7, \mathrm{E}_8$ の５種類である。

注３　高次元の正多面体群を考えるという一般化や、 結晶群を考えるという一般化もありうるが、ここでは正多面体群を球面幾何と思うことにして、その平面幾何や双曲的幾何への一般化を考えようというのである。